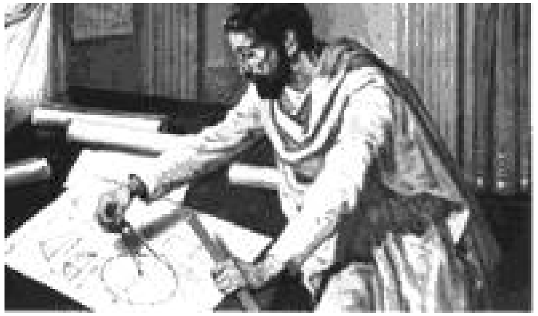
π

N Ä H E R U N G S K O N S T R U K T I O N E N



Die 3 Konstruktionsaufgaben der Antike (~ 500 v. Chr.)

Es trete kein der Geometrie Unkundiger ein.
[*Inschrift über dem Eingang zu Platon's berühmter Akademie.*]

Wer die erhabene Weisheit der Mathematik tadelt, nährt sich von Verwirrung. *Leonardo da Vinci*

Ars mathematica damnabilis et interdicta est. *Römisches Recht*
(Die Kunst der Mathematik ist verwerflich und verboten.)

Geometrische Konstruktionsaufgaben zählen zu den ältesten Aufgabentypen der Mathematik.

- Herausbildung des logischen und konstruktiven Denkens (Kunst des Erfindens: „ARS INVENIENDI")
- Strenge Determination
- Herausbildung prinzipieller neuer Ideen: Anregungen aus geometrischen Konstruktionen

A) Die Quadratur des Kreises

B) Die Winkeldreiteilung (Trisektion)

Winkel α → Winkel φ mit $\alpha = 3\varphi$

C) Die Würfelverdopplung (DELIsches Problem)

Würfel $V = a^3$ → Würfel $2V = x^3$

$a = 1$ → $V = 1$ → $2 = x^3$ → $x = \sqrt[3]{2}$

Auftrag des Orakels (Weissagung, rätselhafter Ausspruch) von Delphi, zur Abwendung der Pest vom würfelförmigen Apollo-Altar auf Delos einen gleichen doppelten Inhalts zu bauen (zu konstruieren).
Delphi: altgriechischer Ort und Heiligtum des Apollon; religiöses Zentrum der griechischen Antike; berühmt durch die Orakelsprache der Priesterin Pythia.
Alle drei klassischen Probleme sind elementar nicht lösbar.

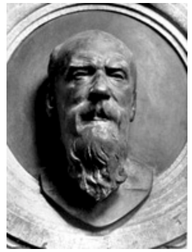
Die Quadratur des Kreises

Aufgabenstellung:
Einzig mit Hilfe von **Zirkel** und **Lineal ohne Teilungen** (klassische Konstruktionshilfsmittel seit PLATON) ist in einer endlichen Zahl von Operationen ein Quadrat zu konstruieren, das einen gegebenen Kreis flächengleich ist.

Bemerkungen:

- Es ist die Älteste der 3 Aufgaben.
- 1761 (?) bewies der Mathematiker *Johann Heinrich Lambert* (1728-1777) die Irrationalität von π.

- 1882 bewies der deutsche Mathematiker *Ferdinand von Lindemann* (1852-1939): Die Zahl π ist transzendent, dass heißt π ist eine reelle Zahl, die nicht Nullstelle (oder Lösung) eines Polynoms sein kann (z. B. auch die Zahlen e (*Euler*'sche Zahl) oder lg 5). Die Aufgabe ist somit nicht lösbar!

Gegeben:
k(M;R) Gesucht: $A = \pi \cdot R^2$ Quadrat mit Seitenlänge a = x, $A = x^2$

R = 1 (Einheitskreis) → $x^2 = \pi$ → $x = \sqrt{\pi}$
→ Strecke der Länge π müsste konstruierbar sein.

π - Näherungskonstruktionen:

Festlegung:
Unter einer Näherungskonstruktion einer Konstruktionsaufgabe wollen wir eine Konstruktion verstehen, deren Ergebnis der theoretisch exakten Konstruktion um nicht mehr als einen bewusst zugelassenen Wert (Fehler) abweicht.
Man kann zeigen, dass sich Verhältnisse von natürlichen Zahlen, z. B. $\frac{22}{7}$, mit den klassischen Hilfsmitteln einfach konstruieren lassen. (Abb. 2)
Deshalb erhält man daraus eine Menge von π - Näherungskonstruktionen der gleichen Art.

Es gilt: $\frac{11}{3{,}5} = \frac{22}{7} \approx \frac{\pi}{1}$

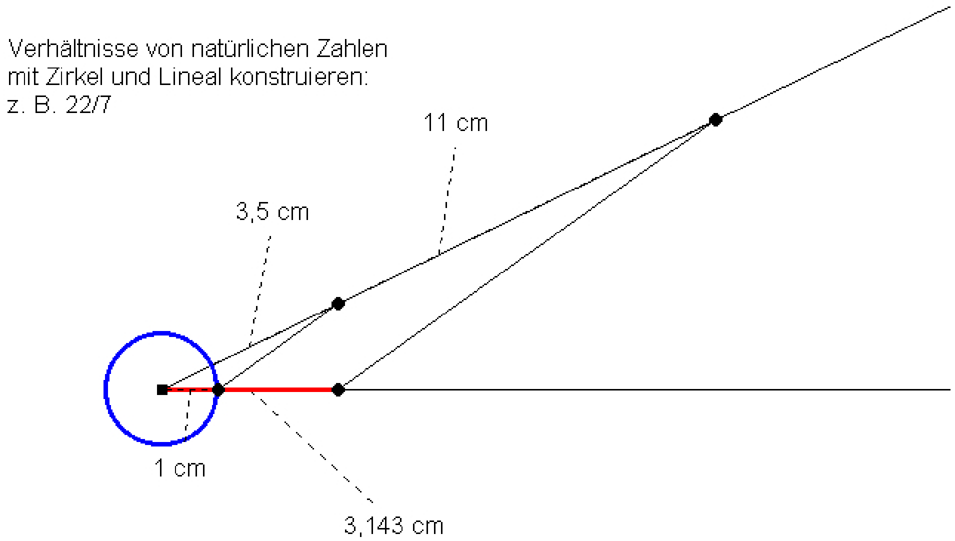


Abb. 2

Ebenso ist es möglich beliebige Quadratwurzeln $\sqrt{a}$ mit $a \in N$ als Streckenlängen zu konstruieren. (Abb. 3)
$\sqrt{10} \approx 3{,}1623$ wurde als Näherungswert für π verwendet. (z. B. *Brahmagupta*, ca. 650)

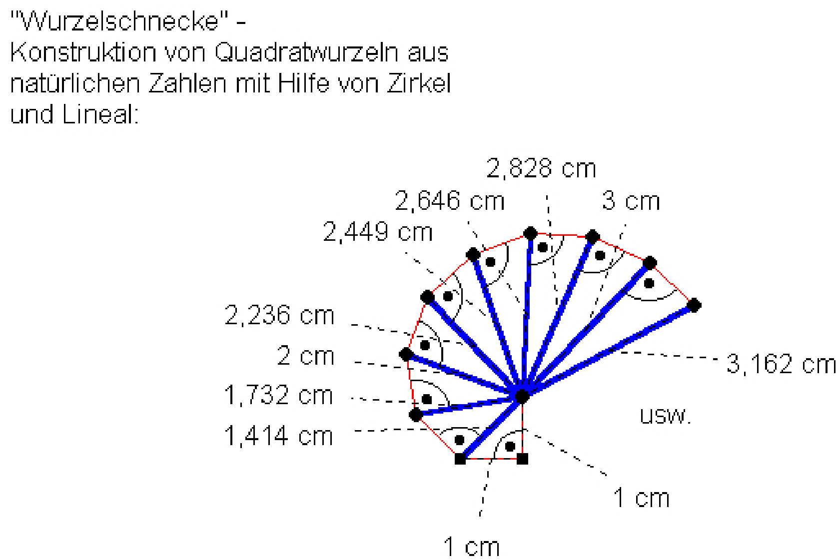


Abb. 3

Nun gibt es eine Vielzahl von originellen Ideen – die vielleicht auch deshalb überliefert wurden – bei der Konstruktion von Näherungen für π. Vielleicht dachten sogar einige Geometer, sie hätten die „Quadratur des Kreises“, welches heute schon ein geflügeltes Wort für die Unmöglichkeit einer Sache ist, gefunden. Einige Beispiele sollen etwas näher betrachtet und die „Zahlengeometrie“ so einfach wie möglich dargestellt werden.
Es sind zum Verständnis nur elementargeometrische Kenntnisse notwendig.

1.) Aus dem Altertum bzw. der **indischen Geometrie** stammen so genannte Schnurregeln (Śulba-Sūtras), die der Sakralgeometrie angehören. Es handelt sich um Anweisungen für die Priester. (siehe auch [3], S. 144 f.)
Die Vorschriften verlangten zum Beispiel, Altäre in einer bestimmten Form zu bauen. Dabei war die **Flächengleichheit** eine Voraussetzung. So musste man gezwungenermaßen die Quadratur des Kreises oder dessen Umkehrung (auch Zirkulatur genannt) näherungsweise bewerkstelligen. Interessant ist dabei, dass zu jener Zeit (~ 600 v. Chr.) der genaue Zusammenhang zwischen Umfang und Inhalt eines Kreises nicht bekannt war!
Nach einer Rekonstruktion von C. Müller (siehe [3], S. 149) erhielt man folgende Approximation (Abb. 4):

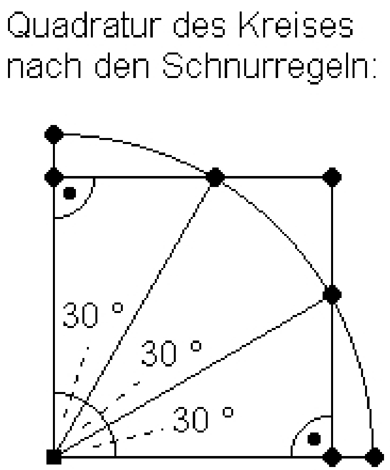


Abb. 4

2.) **Rektifikation** (Längenbestimmung des Bogens einer Kurve) von ***Vieta*** (1540-1603) (Abb. 5):
Die Approximation erfolgt mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Kathetenlängen betragen $\frac{6}{5}$ und $\frac{3}{5}$ vom Radius R. Die Hypotenuse ist $\sqrt{\frac{9}{5}}$ LE lang (für R = 1 LE).

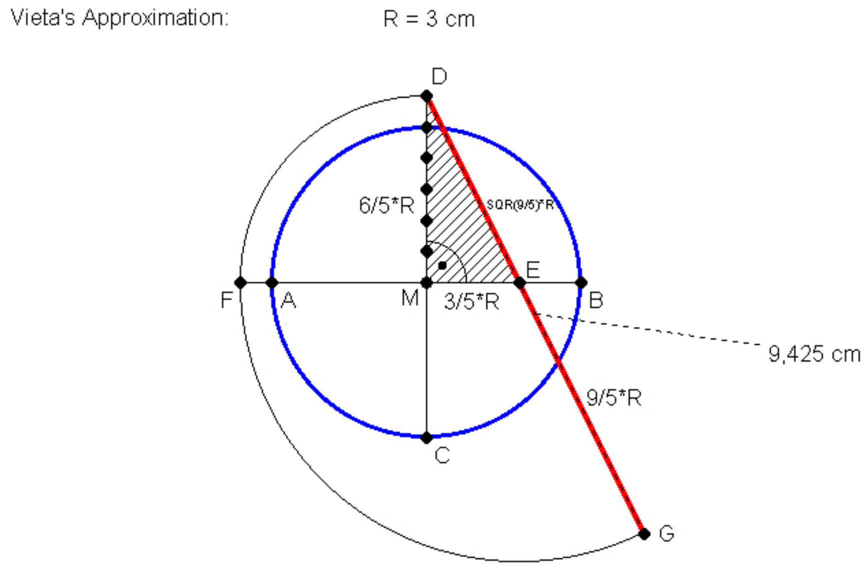


Abb. 5

$\pi \approx \frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}} = 3{,}14164...$

Es gelten folgende Beziehungen: $\frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8$ und

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = 1{,}8 = \left(\sqrt{1{,}8}\right)^2$

Im rechtwinkligen Dreieck EDM gilt der Satz des Pythagoras. Die Länge der Strecke DG entspricht der Länge des halben Kreisumfanges.

Wenn R = 1, dann $\overline{DG} \approx \pi$.

3.) Rektifikation des Halbkreisbogens von 1685 nach ***A. A. Kochansky*** (1631-1700) (Abb. 6): *Kochansky* war ein polnischer Mathematiker und Jesuit. Er trug den Titel eines königlichen Mathematikers.

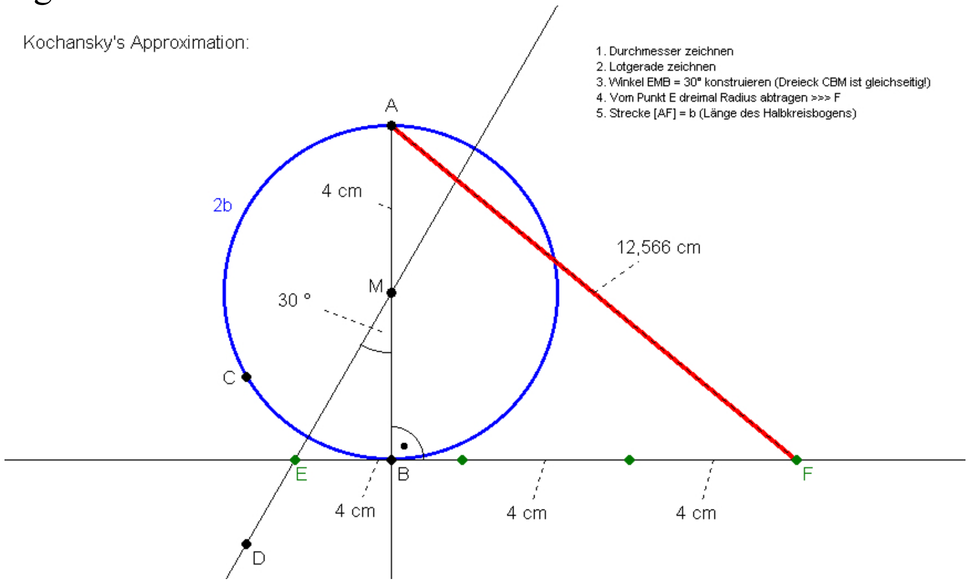


Abb. 6

Herleitung:

Im rechtwinkligen Dreieck EBM gilt:

$\tan 30° = \frac{\overline{EB}}{R} \rightarrow \overline{EB} = R \cdot \tan 30° = R \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ (1)

Im rechtwinkligen Dreieck FAB gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 = (2R)^2 + (\overline{EF} - \overline{EB})^2 = 4R^2 + (3R - \frac{R}{\sqrt{3}})^2$

[(1) einsetzen]

$\overline{AF}^2 = 4R^2 + 9R^2 - \frac{6}{\sqrt{3}} R^2 + \frac{R^2}{3} = \frac{40}{3} R^2 - 2\sqrt{3} R^2 = (\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}) R^2$

$\rightarrow \frac{\overline{AF}}{R} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$

Wenn R = 1, dann $\overline{AF} \approx \pi$.

$\pi \approx \sqrt{2^2 + (3 - \frac{1}{3}\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}} = 3{,}141533...$

Die Abweichung vom tatsächlichen Wert (Fehler) beträgt $6 \cdot 10^{-5}$.

Es folgen zwei Näherungskonstruktionen, die im berühmten Buch von P. Beckmann, „A history of π", mit kleinen Fehlern beschrieben bzw. abgebildet wurden (siehe [1], S. 119/120):

4.) Rektifikation des Halbkreisbogens von 1849 nach ***Jakob de Gelder*** (?-?) (Abb. 7):

Gelder verwendete den Bruch $\frac{355}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2+8^2}$.

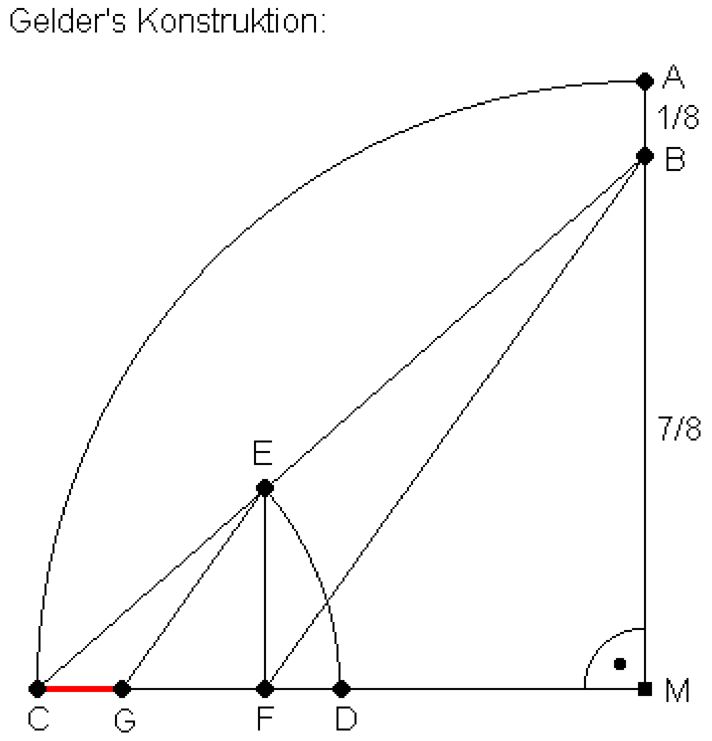
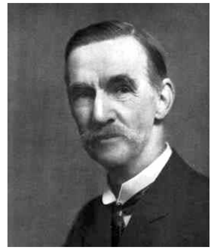


Abb. 7

5.) Rektifikation des Halbkreisbogens von 1913 nach ***Ernest William Hobson*** (1856-1933) (Abb. 8):



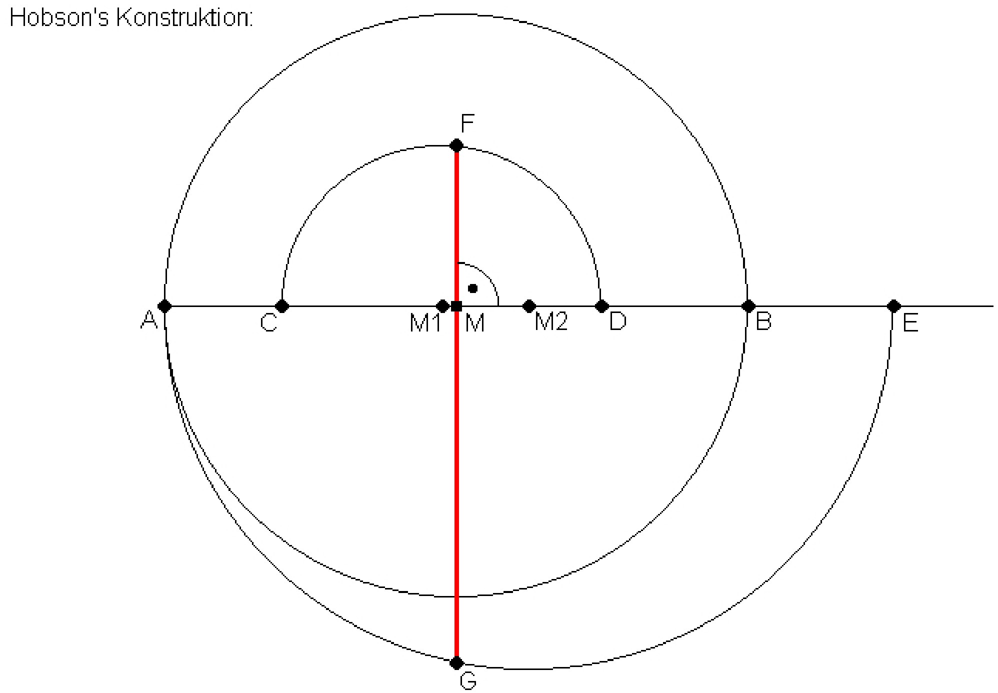


Abb. 8

Zum Abschluss noch zwei andere Konstruktionen mit eingeschränkten Hilfsmitteln:
MOHR-MASCHERONI-KONSTRUKTIONEN:
Alle geometrischen Konstruktionen, die mittels Zirkel und Lineal ausführbar sind, sind auch mit dem Zirkel allein ausführbar. Gegeben: Eine Gerade durch irgend zwei ihrer Punkte.
Beispiel: C an AB spiegeln
PONCELET-STEINER-KONSTRUKTIONEN:
Alle geometrischen Konstruktionen, die mittels Zirkel und Lineal ausführbar sind, sind auch mit dem Lineal allein ausführbar, wenn ein Kreis und sein Mittelpunkt gezeichnet vorliegen.
Beispiel: Ein Rechteck ist zu konstruieren.

Literaturverzeichnis:

[1] Petr Beckmann: A history of π
© 1971 by THE GOLEM PRESS
[2] Jean-Paul Delahaye: π - Die Story
© 1999 Birkhäuser Verlag
[3] C.J. Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001
[4] Walter Kranzer: So interessant ist Mathematik
© 1989 by Aulis Verlag Deubner & KG Köln
[5] David Blatner: π – Magie einer Zahl
© 2000 by Rowohlt Verlag GmbH
[6] Georg Glaeser: Der mathematische Werkzeugkasten
© 2004 Elsevier GmbH, München
[7] L. Berggren, J. & P. Borwein: Pi: A Source Book
© 1997 Springer-Verlag New York, Inc.
[8] Maximilian Miller: Gelöste u. ungelöste math. Probleme
© BSB B. G. Teubner Verl., Leipzig, 1973
[9] W. Lietzmann: Altes und Neues vom Kreis
© 1966 by B. G. Teubner Verl. Leipzig
[10] Underwood Dudley: Mathematik zwischen Wahn u. Witz
© 1995 by Birkhäuser Verlag, Basel
[11] Helmut Kracke: Mathe-musische Knobelisken
© 1992 F. Dümmlers Verlag, Bonn
[12] Heinrich Tietze: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit, Band 1
© 1959 C. H. Beck'sche Verl., München
[13] A. S. Posamentier, I. Lehmann:
A Biography of the World's Most Mysterious Number
© 2004 Prometheus Books, New York